ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Ю.И. Янов.

МЕТОД СВЕРТОК ДЛЯ РАЗРЕШЕНИЯ СВОЙСТВ ФОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Препринт № 11 за 1977г.

Москва.

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Ю.И.Янов

МЕТОД СВЕРТОК ДЛЯ РАЗРЕШЕНИЯ СВОЙСТВ ФОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Москва 1977 г.

УДК 512.6:577.4

В работе описан способ разрешения свойств алгоритмов и других формальных систем, основанный на преобразовании нагруженных бесконечных деревьев в конечные диаграммы. Таким путем получаются разрешающие процедуры для тех свойств, которые сохраняются при преобразованиях и разрешимы на множестве конечных диаграмм. Для применения этого подхода к машинам Тьюринга их функционирование описывается в виде бесконечных деревьев, характеризующих некоторые семантические свойства машин. Приводятся примеры классов машин с разрешимыми свойствами указанного типа.

A method of solution for properties of algorithms and those of other formal sistems based on the transformation of loaded infinite trees into finite diagrams is described. To apply the metnod to the Turing machines, their functioning is describet in terms of infinite trees that express some semantic properties of the machines. Some examples of machine classes with solvable properties of the described type are given.

Метод сверток для разрешения свойств формальных систем

Ю.И.Янов

0. Введение.

Семантическая характеризация таких формальных систем, как алгоритмы, представляет интерес с разных точек зрения: разрешения их свойств, эквивалентных преобразований, оценок сложности и т.д. Поскольку в классе всех алгоритмов любое функциональное свойство (за исключением двух тривиальных) неразрешимо, то для положительного решения этой задачи приходится выделять определенные подклассы алгоритмов или других объектов, задающих вычислимые функции. Это выделение можно формулировать как в синтаксических, так и в семантических терминах, в частности – в функциональных. Как показывает опыт, чисто синтаксические или чисто функциональные ограничения не дают хороших результатов, так что естественно предположить, что более успешным должен оказаться какой-то средний подход. Аналогичная ситуация имеет место в теории сложности алгоритмов. Чисто синтаксическая сложность (например, число команд) очень слабо характеризует сложность функционирования алгоритма. В то же время при оценке последней частично рекурсивными функциями в значительной мере затруднено сравнение таких сложностей.

В настоящей работе предлагается новый подход к задаче разрешения семантических свойств формальных систем, основанный на построении конечных диаграмм, характеризующих некоторые их свойства. При этом к формальным системам мы относим и формальные понятия алгоритма такие, как машины Тьюринга, программы, нормальные алгоритмы и т.п. Рассмотрим для примера машины Тьюринга. Множество всех вычислений на машине Тьюринга можно описать в виде бесконечного ориентированного дерева, вершинами которого являются конфигурации. Такое дерево характеризует определенные семантические, в частности, функциональные свойства машины. Для определенных классов машин существуют эффективные операции, позволяющие строить конечные свертки таких деревьев - так называемые диаграммы, сохраняющие некоторые свойства этих деревьев. Поскольку эти свойства разрешимы на конечных графах, то тем самым мы получаем для них разрешающую процедуру в данном классе машин. Если рассматривать и не эффективные в общем случае операции свертки, то класс машин с разрешимыми свойствами будет не рекурсивным, но может оказаться достаточно широким. Поскольку в принципе можно получить конечную свертку для какой-либо ниверсальной машины Тьюринга, то возможно разрешение некоторых свойств для такого класса машин, которые вычисляют все частично рекурсивные функции (правда не при всяком кодировании входных данных).

Другой круг вопросов связан с определением такой меры сложности машин Тьюринга, которая отражала бы сложность их функционирования, и в каком-то смысле - величину памяти. Мерой такого типа является сложность (например, число вершин) конечной свертки дерева вычислений. Эта сложность, правда, зависит от операций свертывания, но если принимать во внимание сохраняемые при свертке свойства, то эта особенность становится естественной.

В связи с задачей семантической характеризации машин Тьюринга представляет интерес следующий вопрос. В настоящей работе построена конкретная операция, позволяющая получить конечную свертку (с сохранением определенных свойств) для любого дерева типа деревьев вычислений для машин Тьюринга. Возникает вопрос: существуют ли такие операции, которые дают конечные свертки только для всех деревьев вычислений, но не для всех деревьев такого типа вообще? Отрицательный ответ на этот вопрос означал бы, что класс вычислительных процессов для существующего понятия алгоритма настолько широк, что по своим свойствам мало отличается от класса всех, в том числе и неэффективных, процессов подобного типа.

I. Некоторые общие понятия и результаты

I.I. Мы будем рассматривать связные ориентированные графы ограниченной положительной степени (т.е. с ограниченным числом дуг, выходящих из произвольной вершины). Те термины, которые мы не определяем, используются в общепринятом смысле; их определения можно найти, например, в книге [I] . Часть терминов, употреблявшихся ранее, нам удобно использовать в несколько ином смысле, чем принято, и поэтому мы приводим их явные или неявные определения.

Цепочка в ориентированном графе - это такая последовательность вершин $v_0\, v_1 \ldots$, что всякая вершина v_{i+1} , $i = 0,1,\ldots$, является непосредственным последователем вершины v_i , т.е. существует дуга, ведущая из v_i в v_{i+1} . Путем в ориентированном графе будем называть цепочку, порядковый тип которой не превосходит ω . Если $v_0\, v_1 \ldots v_n$ - конечный путь, то будем говорить, что это - путь из вершины v_0 в вершину v_n , а также, что v_n является последователем v_0 .

Диаграммой назовем такой ориентированный граф, у которого, во-первых, выделена некоторая вершина, называемая корнем и обладающая тем свойством, что из нее существует путь в любую вершину, и, во-вторых, порядковый тип любой цепочки без циклов не превосходит ω.

Примером диаграммы может служить ориентированное дерево, корень которого определен однозначно как вершина, в которую не ведет ни одна дуга (при этом вершины любой ветви образуют цепочку, порядковый тип которой не должен превосходить ω).

Путь в диаграмме назовем начальным, если его первая вершина является корнем. Ветвь диаграммы - это начальный путь, который либо бесконечен, либо заканчивается в концевой вершине, т.е. в вершине, не имеющей непосредственных последователей.

Пусть v - произвольная вершина диаграммы $\mathcal{D}$. Полной поддиаграммой с корнем v диаграммы $\mathcal{D}$ назовем такой подграф $\mathcal{D}_v$ графа $\mathcal{D}$, который содержит вершину v и все её последователи, и только их. Полную поддиаграмму, являющуюся деревом, будем называть полным поддеревом, если из вершин, не принадлежащих ей, не ведут дуги ни в одну из её вершин, кроме корня.

Будем называть субдиаграммой диаграммы $\mathcal{D}$ такую ее часть, которая сама является диаграммой и наряду с каждой неконцевой вершиной содержит хотя бы один из ее непосредственных последователей. (Таким образом, субдиаграмма отличается от полной поддиаграммы только тем, что последняя наряду с каждой вершиной содержит и все ее последователи).

Если Φ - бинарное отношение на множестве диаграмм, то будем обозначать через Φ' такое отношение, что $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) \in \Phi'$ тогда и только тогда, когда существует субдиаграмма $\mathcal{D}_2'$ диаграммы $\mathcal{D}_2$ с тем же корнем, что и у $\mathcal{D}_2$, и такая, что $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2') \in \Phi$.

Далее мы будем рассматривать диаграммы, каждой вершине которых приписана буква из некоторого алфавита А. Если при этом положительная степень любой вершины (т.е. число выходящих из нее дуг) не превосходит некоторое число k, и всем дугам, выходящим из одной вершины взаимно однозначно сопоставлены буквы из алфавита $Б=\{0,1,\ldots,k-1\}$ [1)], то такие диаграммы мы будем называть A,k - диаграммами.

Вершину v' будем называть a-последователем вершины v, если из v в v' ведет дуга, которой сопоставлена буква a (такие дуги будем называть a-стрелками).

Пусть $W\mathcal{D}$ обозначает множество всех ветвей диаграммы $\mathcal{D}$. Если v - вершина A,k - диаграммы $\mathcal{D}$, то Av будет обозначать букву из алфавита A, приписанную v. Если $w=v_0,v_1\ldots$ - путь в A,k - диаграмме $\mathcal{D}$, то $Aw=Av_0Av_1\ldots$ - последовательность букв, приписанных вершинам пути w; $AW\mathcal{D}=\{Aw : w\in W\mathcal{D}\}$.

I.2. Предикаты на множестве диаграмм будем называть свойствами диаграмм. Как правило, мы будем рассматривать одноместные свойства.

Пусть $\mathcal{R}=\{R_i : i\in M\}$ - множество одноместных свойств диаграмм, где $M\subseteq N$, N - множество всех натуральных чисел. Мы скажем, что диаграммы $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ $\mathcal{R}$-эквивалентны, что обозначим $\mathcal{D}\overset{\mathcal{R}}{\sim}\mathcal{D}'$, если $\forall R_i\in\mathcal{R}(R_i(\mathcal{D})\Leftrightarrow R_i(\mathcal{D}'))$.

В дальнейшем нас будут интересовать только такие свойства, которые разрешимы на множестве конечных диаграмм. Очевидно, что

I) Поскольку такие знаки, как „$k-1$" не являются буквами в общепринятом смысле, то их следует рассматривать как обозначения букв. Это замечание относится и к другим подобным ситуациям в данной статье.

для класса $\mathcal{R}$ таких свойств проблема их разрешения на произвольном множестве ϑ диаграмм сводится к проблеме построения для каждой диаграммы $\mathcal{R}$-эквивалентной ей конечной диаграммы. Решение этой задачи представляет интерес в связи с тем, что множество выводов или вычислений в формальной системе можно описать в общем случае бесконечным A, k-деревом.

В качестве примеров свойств, разрешимых на конечных диаграммах, рассмотрим следующие свойства.

1) $O(\mathcal{D}) \Longleftrightarrow$ в диаграмме $\mathcal{D}$ имеется конечная ветвь;

2) $Б(\mathcal{D}) \Longleftrightarrow$ в диаграмме $\mathcal{D}$ имеется бесконечная ветвь;

3) $C_a(\mathcal{D}) \Longleftrightarrow A, k$- диаграмма $\mathcal{D}$ содержит вершину, которой приписана буква a ;

4) $C_a^\infty(\mathcal{D}) \Longleftrightarrow A, k$- диаграмма $\mathcal{D}$ содержит ветвь с бесконечным множеством вершин, которым приписана буква a ;

5) $O^\infty(\mathcal{D}) \Longleftrightarrow$ диаграмма $\mathcal{D}$ содержит бесконечное множество конечных ветвей.

О значении этих свойств применительно к машинам Тьюринга будет сказано ниже.

Если Φ - бинарное отношение, то вместо $(\alpha, \beta) \in \Phi$ будем писать $\alpha \Phi \beta$. Через $\Phi(\alpha)$ будем обозначать срез отношения Φ элементом α , т.е. $\Phi(\alpha) = \{\beta : \alpha \Phi \beta\}$

Пусть Φ - бинарное отношение, а P n-местное свойство на множестве диаграмм. Будем говорить, что отношение Φ сохраняет свойство P на множестве ϑ диаграмм, если для любых $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n, \mathcal{D}_1', \ldots, \mathcal{D}_n'$ из ϑ таких, что $\mathcal{D}_1 \Phi \mathcal{D}_1', \ldots, \mathcal{D}_n \Phi \mathcal{D}_n'$ из $P(\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n)$ следует $P(\mathcal{D}_1', \ldots, \mathcal{D}_n')$.

Ясно, что если отношения Φ и Φ^{-1} сохраняют все свойства из класса $\mathcal{R}$, то $\mathcal{D}\Phi\mathcal{D}' \Rightarrow \mathcal{D} \overset{\mathcal{R}}{\sim} \mathcal{D}'$. Поэтому для разрешения свойств деревьев (из некоторого интересующего нас класса) достаточно иметь такое бинарное отношение Φ на множестве диаграмм, что, во-первых, Φ и Φ^{-1} сохраняют свойства из класса $\mathcal{R}$, и, во-вторых, для всякого дерева $\mathcal{D}$ множество $\Phi(\mathcal{D})$ содержит конечную диаграмму, причем существует эффективный способ её построения по дереву $\mathcal{D}$.

Ниже мы рассмотрим два подхода к решению этой задачи. Оба подхода состоят в получении так называемых сверток деревьев с помощью некоторых операций, сохраняющих различные свойства диаграмм. При этом будет построена операция, дающая при втором подходе для любого A,k-дерева конечную свертку.

2. <u>Свертки по поддеревьям</u>

Пусть $\mathcal{D}$ - ориентированное дерево, Φ - бинарное отношение на множестве ϑ всех диаграмм, являющихся ориентированными деревьями (т.е. $\Phi \subseteq \vartheta \times \vartheta$). Определим понятие Φ - свёртки дерева $\mathcal{D}$. Пусть $v_0, v_1, v_2, \ldots$ - все вершины дерева $\mathcal{D}$, упорядоченные по ярусам, а внутри ярусов - произвольным образом. Пусть $\mathcal{P}_0$ - последовательность $\mathcal{D}_{v_0}, \mathcal{D}_{v_1}, \mathcal{D}_{v_2}, \ldots$ полных поддеревьев дерева $\mathcal{D}$ с корнями соответственно $v_0, v_1, v_2, \ldots$. Находим в последовательности $\mathcal{P}_0$ первое поддерево $\mathcal{D}_{v_j}$ такое, что для некоторого $i < j$ $\mathcal{D}_{v_j} \Phi \mathcal{D}_{v_i}$, и в дереве $\mathcal{D}$ удаляем поддерево $\mathcal{D}_{v_j}$, дугу, ведущую в вершину v_j, направляем в v_i, и из последовательности $\mathcal{P}_0$ удаляем все поддеревья дерева $\mathcal{D}_{v_j}$. С полученными таким образом последовательностью поддеревьев $\mathcal{P}_1$ и диаграммой $\mathcal{D}_1$

поступаем аналогичным образом до тех пор, пока в последовательности поддеревьев будут иметься пары $(\mathcal{D}_{v_j}, \mathcal{D}_{v_i})$, принадлежащие Φ. Диаграмму, полученную в результате этого процесса, обозначим через $\mathcal{D}^{\Phi}$ и будем называть её Φ-сверткой дерева $\mathcal{D}$ (или просто – сверткой, если ясно, о каком отношении идет речь).

Последовательность диаграмм $\mathcal{D}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}^{\Phi}$, получаемых на каждом шаге этого процесса (включая саму свертку) назовем Φ-сверточной последовательностью для дерева $\mathcal{D}$ и отношения Φ. Эта последовательность может быть как конечной, так и бесконечной (типа $\omega + 1$).

Поскольку мы определили процесс получения свертки $\mathcal{D}^{\Phi}$ как перестройку дерева $\mathcal{D}$, состоящую в удалении некоторых поддеревьев и присоединении образовавшихся висячих дуг к определенным вершинам свертки, то в дальнейшем мы в нужных случаях для простоты будем отождествлять вершины и дуги свертки с соответствующими вершинами и дугами исходного дерева.

<u>Предложение 2.1</u>. Если свертка $\mathcal{D}^{\Phi}$ конечна, то конечна и Φ-сверточная последовательность $\mathcal{D}, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}^{\Phi}$.

$\uparrow$ Предположим, что сверточная последовательность $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}^{\Phi}$ бесконечна. Пусть v_{i_n} – корень поддерева, удаляемого из $\mathcal{D}_n$ при переходе к $\mathcal{D}_{n+1}$, а $v_{n'}$ – вершина, непосредственным последователем которой является v_{i_n}. Поскольку последовательность $v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots$ – бесконечна, то эти вершины принадлежат бесконечному множеству ярусов дерева $\mathcal{D}$, так что для любого натурального числа m существует число n такое, что путь $v_0 \ldots v_{n'}$ из корня дерева $\mathcal{D}$ в вершину $v_{n'}$ имеет длину $\geqslant m$. По определению сверточной последовательности ни одна из вершин этого пути не может быть корнем поддерева, удаляемого на каком-либо шаге, так что этот путь без изменения содержится во всех диаграммах сверточной последовательности, включая $\mathcal{D}^{\Phi}$. Это означает, что в диаграмме $\mathcal{D}^{\Phi}$ существуют сколь угодно длинные пути без циклов, т.е. свертка $\mathcal{D}^{\Phi}$ бесконечна. ↓

Пусть V – подмножество вершин диаграммы $\mathcal{D}$. Обозначим через $\overline{\mathcal{D}}_V$ диаграмму, которая получается из $\mathcal{D}$ удалением всех полных поддиаграмм $\mathcal{D}_v$ таких, что $v \in V$ (а также – и образовавшихся висячих дуг).

Множество V вершин диаграммы $\mathcal{D}$, не содержащее ее корня, будем называть сечением, если любая бесконечная ветвь диаграммы $\mathcal{D}$ содержит ровно одну вершину из V.

С помощью предложения 2.I легко доказывается

<u>Предложение 2.2</u>. Свертка $\mathcal{D}^{\Phi}$ дерева $\mathcal{D}$ конечна тогда и только тогда, когда существует конечное сечение V дерева $\mathcal{D}$ такое, что для любой вершины v из V в $\overline{\mathcal{D}}_V$ найдется такая вершина v', что $\mathcal{D}_v \Phi \mathcal{D}_{v'}$.

↑ Согласно предложению 2.I, если свертка конечна, то конечна и сверточная последовательность. А так как конечная диаграмма не содержит бесконечных ветвей без циклов, то в любой бесконечной ветви дерева $\mathcal{D}$ должна найтись вершина, которая является корнем дерева, удаляемого на некотором шаге построения свертки. Поскольку сверточная последовательность конечна, то это означает, что множество таких вершин образует конечное сечение V. При этом из определения свертки следует, что для каждой вершины v из V должна найтись вершина v' в $\overline{\mathcal{D}}_V$ такая, что $\mathcal{D}_v \Phi \mathcal{D}_{v'}$.

В обратную сторону утверждение следует из того факта, что $\overline{\mathcal{D}}_V$ содержит все вершины, предшествующие каким-либо вершинам сечения V. ↓

Пусть Φ - бинарное отношение на некотором множестве $\mathfrak{A}$. Подмножество $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{A}$ будем называть Φ-базисом множества $\mathfrak{A}$, если $\forall \alpha \in \mathfrak{A} \exists \beta \in \mathcal{B} (\alpha \Phi \beta)$.

Из предложения 2.2 следует

<u>Предложение 2.3</u>. Если множество всех полных поддеревьев дерева $\mathcal{D}$ имеет конечный Φ-базис, то свертка $\mathcal{D}^{\Phi}$ конечна.

$\uparrow$ Действительно, пусть $\mathcal{D}_{u_0}, \ldots, \mathcal{D}_{u_m}$ - базис для множества всех полных поддеревьев дерева $\mathcal{D}$. Рассмотрим конечное сечение V такое, что все вершины $u_0, \ldots, u_m$ содержатся в $\overline{\mathcal{D}}_V$. Поскольку $\mathcal{D}_{u_0}, \ldots, \mathcal{D}_{u_m}$ - базис для всех полных поддеревьев дерева $\mathcal{D}$, то для любой вершины v из V найдется такое $n \leq m$, что $\mathcal{D}_v \Phi \mathcal{D}_{u_m}$. Согласно предложению 2.2 это означает, что свертка $\mathcal{D}^{\Phi}$ конечна. $\downarrow$

Отметим следующее очевидное

<u>Предложение 2.4</u>. Пусть P - n-местное свойство, рекурсивное на множестве конечных диаграмм, а Φ такое бинарное отношение на множестве диаграмм, что для любого дерева $\mathcal{D}$ из некоторого класса деревьев ϑ свертка $\mathcal{D}^{\Phi}$ конечна и $\mathcal{D} \Phi \mathcal{D}^{\Phi}$. Тогда, если отношения Φ и Φ^{-1} сохраняют свойство P, то оно рекурсивно на множестве ϑ относительно получения Φ-сверток.

Таким образом, проблема разрешения свойств бесконечных деревьев связана с нахождением таких отношений Φ и подклассов ϑ деревьев, которые удовлетворяют предложению 2.4., и для которых существует эффективная процедура получения свертки. Для выполнения последнего условия достаточно, например, чтобы отношение Φ было рекурсивным (при условии, что свертки конечны).

Пусть диаграмма $\mathcal{D}'$ получается из диаграммы $\mathcal{D}$ путем применения одного сверточного шага, т.е. удалением из $\mathcal{D}$ некоторого полного поддерева $\mathcal{D}_v$, для которого в оставшейся части имеется поддиаграмма $\mathcal{D}_u$ такая, что $\mathcal{D}_v \Phi \mathcal{D}_u$, и присоединением дуг, которые вели в v, к вершине u. Транзитивное бинарное отношение Φ назовем устойчивым на множестве ϑ диаграмм, если для любой диаграммы $\mathcal{D}$ из ϑ выполняется $\mathcal{D} \Phi \mathcal{D}'$.

Очевидно следующее

<u>Предложение 2.5.</u> Если отношение Φ -устойчивое на множестве диаграмм, то для любого дерева $\mathcal{D}$, для которого Φ - сверточная последовательность конечна, выполняется $\mathcal{D} \Phi \mathcal{D}^{\Phi}$.

Как обычно, пусть A^* обозначает множество всех слов, а A^{∞} - множество всех сверхслов (т.е. бесконечных последовательностей букв) в алфавите A. Пусть $A^{\circledast} = A^* \cup A^{\infty}$. Если $\alpha \in A^*$, то $\ell\alpha$ - длина слова α; если $\alpha \in A^{\infty}$, то $\ell\alpha = \infty$.

Пусть $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ - A, k - диаграммы, $w_1 = u_0 u_1 \ldots$ - путь в диаграмме $\mathcal{D}_1$, $w_2 = v_0 v_1 \ldots$ - путь в диаграмме $\mathcal{D}_2$ и $w_1' = u_{i_0} u_{i_1} \ldots$ ($w_2' = v_{j_0} v_{j_1} \ldots$) - подпоследовательность всех вершин из w_1 (из w_2), положительная степень которых > 1. Пути w_1 и w_2 назовем аналогичными, что обозначим $w_1 \sim w_2$, если $\ell w_1' = \ell w_2'$ и для всех m, меньших $\ell w_1'$ вершина u_{i_m+1} является α-последователем вершины u_{i_m} тогда и только тогда, когда вершина v_{j_m+1} является α-последователем вершины v_{j_m}.

Будем считать, что всякое бинарное отношение f на произвольном множестве M распространяется на множество всех его подмножеств следующим образом: если $Q_1, Q_2 \subseteq M$, то $Q_1 f Q_2$ тогда и только тогда, когда для всякого α из Q_1 существует β из Q_2 такое, что $\alpha f \beta$, и для всякого β из Q_2 существует α из Q_1 такое, что $\alpha f \beta$.

Ясно, что отношение аналогичности является отношением эквивалентности как на множестве путей, так и на классе множеств ветвей. Очевидно, что в любом A, k-дереве не существует двух различных аналогичных ветвей, так что для каждой ветви одного дерева существует не более одной аналогичной ей ветви в другом дереве.

Пусть f – бинарное отношение на множестве $A^{\circledast}$. Мы сопоставим ему следующие бинарные отношения I_f, Ψ_f, Ω_f (и, следовательно, также I'_f, Ψ'_f, Ω'_f) на множестве A, k - диаграмм:

для произвольных A, k - диаграмм $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ полагаем

$\mathcal{D}_1 I_f \mathcal{D}_2 \Longleftrightarrow W\mathcal{D}_1 \sim W\mathcal{D}_2$, и если $w_1 \sim w_2$, где $w_1 \in W\mathcal{D}_1$, $w_2 \in W\mathcal{D}_2$, то $Aw_1 f Aw_2$.

$\mathcal{D}_1 \Psi_f \mathcal{D}_2 \Longleftrightarrow$ существует функция φ, отображающая $W\mathcal{D}_1$ на $W\mathcal{D}_2$ и такая, что для любого w из $W\mathcal{D}_1$ $Aw f A\varphi w$.

$$\mathcal{D}_1 \Omega_f \mathcal{D}_2 \Longleftrightarrow AW\mathcal{D} f AW\mathcal{D}_2 .$$

Очевидно, что $I_f \subseteq \Psi_f \subseteq \Omega_f$ и $I'_f \subseteq \Psi'_f \subseteq \Omega'_f$.

Очевидно также, что если отношение f транзитивно, то транзитивны и отношения I_f, Ψ_f, Ω_f, если же f – отношение эквивалентности на $A^{\circledast}$, то I_f –

отношение эквивалентности на множестве A, k - диаграмм.

Ниже мы рассмотрим класс устойчивых отношений вида Φ_f где $\Phi \in \{ \mathrm{I}, \Psi, \Omega, \mathrm{I}', \Psi', \Omega' \}$, которые порождаются так называемыми побуквенными отношениями f на $A^{\circledast}$.

Пусть $N_k' = \{1, 2, \ldots, k\}$, $N_\infty' = N'$ - множество всех положительных натуральных чисел. Если $\alpha \in A^{\circledast}$ и $i \in N'$, $i \leqslant \ell\alpha$, то $\alpha_{[i]}$ будет обозначать i-ую по порядку букву (сверх -) слова α, т.е. $\alpha = \alpha_{[1]}\alpha_{[2]}\ldots$

Бинарное отношение f на множестве $A^{\circledast}$ будем называть побуквенным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(f1) если $\alpha f \beta$, то существует функция ν отображающая $N'_{\ell\alpha}$ на $N'_{\ell\beta}$ такая, что[1]:

$$\forall i \leqslant \ell\alpha \, (\alpha_{[i]} = \beta_{[\nu i]}) \quad \text{и}$$

$$\forall i \leqslant \ell\beta \, (\text{множество } \nu^{-1} i \text{ - конечно}),$$

(f2) если $\alpha f \beta$ и $\gamma f \delta$, то $\alpha\gamma f \beta\delta$

(f3) отношение f рефлексивно и транзитивно.

<u>Теорема 2.I</u>. Если f - побуквенное отношение на $A^{\circledast}$, то отношения $\mathrm{I}_f, \Psi_f, \Omega_f, \mathrm{I}'_f, \Psi'_f, \Omega'_f$ - устойчивые на множестве всех A, k - диаграмм $(k \in N')$.

I) Здесь и далее выражения вида $\forall i \leqslant n$ в зависимости от контекста обозначают либо "для всякого i такого, что $1 \leqslant i \leqslant n$", либо "для всякого i такого, что $0 \leqslant i \leqslant n$"

Докажем это утверждение для I_f. Пусть $\mathcal{D}$ – произвольная A,k – диаграмма, а $\mathcal{D}'$ – диаграмма, которая получается из нее удалением некоторого полного поддерева $\mathcal{D}_v$ такого, что $\mathcal{D}_v I_f \mathcal{D}_u$ (1), где u – вершина $\mathcal{D}$, не принадлежащая $\mathcal{D}_v$, и присоединением образовавшихся висячих дуг к вершине u. Покажем сначала, что для любой ветви w диаграммы $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}'$ найдется аналогичная ей ветвь w, причем такая, что $AwfAw'$. Если w не имеет общих вершин с поддеревом $\mathcal{D}_v$, то эта ветвь целиком содержится и в $\mathcal{D}'$. Предположим, что w имеет непустую общую часть с поддеревом $\mathcal{D}_v$. Пусть $w = v_0 v_1 \dots$ $\dots v_m v_{m+1} \dots$. Поскольку $\mathcal{D}_v$ – полное поддерево, то это означает, что для некоторого $m \geqslant 0$ вершина v_m совпадает с v. А так как $\mathcal{D}_v I_f \mathcal{D}_u$, то в поддиаграмме $\mathcal{D}_u$ существует ветвь $w_1' = u u_1 \dots$, аналогичная ветви $w_1 = v_m v_{m+1} \dots$ дерева $\mathcal{D}_v$, причем такая, что $Aw_1 f A w_1'$. Но в диаграмме $\mathcal{D}'$ вершина u является непосредственным последователем вершины v_{m-1}. Поэтому в $\mathcal{D}'$ существует ветвь $w' = v_0 \dots v_{m-1} u u_1 \dots$ которая, во-первых, аналогична ветви w, так как состоит из двух частей, аналогичных частям ветви w и, во-вторых, для этой ветви w' выполняется отношение $AwfAw'$ в силу свойств $(f2)$ и $(f3)$ побуквенных отношений.

Покажем теперь, что для любой ветви w_* диаграммы $\mathcal{D}'$ в диаграмме $\mathcal{D}$ найдется аналогичная ей ветвь w такая, что $AwfAw'$. Возможно, что ветвь w' аналогична такой ветви w диаграммы $\mathcal{D}$, которая не имеет общих вершин с деревом $\mathcal{D}_v$ и потому целиком сохраняется при переходе к $\mathcal{D}'$, т.е. $w' = w$. В этом случае утверждение тривиально. Предположим теперь, что $w' = w_0' w_1'$, где w_0' - максимальное начало ветви w', аналогичное некоторому начальному пути w_0 диаграммы $\mathcal{D}$. Очевидно, что путь w_0 ведет из корня диаграммы $\mathcal{D}$ в такую вершину v_m, одним из непосредственных последователей которой является вершина v. Если v не является последователем вершины u, то w_1' - такая ветвь диаграммы $\mathcal{D}_u$, которая входит как в $\mathcal{D}$, так и в $\mathcal{D}'$. Очевидно, что тогда $w_0 w_1'$ - искомая ветвь диаграммы $\mathcal{D}$.

Предположим, наконец, что вершина v является последователем вершины u, т.е. в $\mathcal{D}$ имеется ветвь $v_0 v_1 \ldots$ $\ldots v_{\ell-1}\, u\, v_{\ell+1} \ldots v_m\, v \ldots$. Это означает, что в $\mathcal{D}'$ возникает цикл $(z) = (u\, v_{\ell+1} \ldots v_m)$, так что ветвь w' может содержать любую степень z^n этого цикла, $0 \leq n \leq \infty$. Если $n = 0$, то ветвь w' просто совпадает с аналогичной ветвью диаграммы $\mathcal{D}$.

Пусть $n > 0$ и $w' = w_0 z^n w_2'$, где $w_0 = v_0 \ldots v_{\ell-1}$, а w_2' - ветвь диаграммы $\mathcal{D}_u$, не содержащая вершину v_m. Возможны два случая.

I) Ветвь w_2' - пустая, т.е. $w' = w_0 z^\infty$. В силу (I) в $\mathcal{D}_v$ существует путь y_1, аналогичный пути z диаграммы $\mathcal{D}_u$. Тогда для пути $z y_1$ диаграммы $\mathcal{D}_u$ в $\mathcal{D}_v$ найдется аналогичный путь $y_2 = y_1 w_2$. Далее, для пути $z y_2$ диаграммы $\mathcal{D}_u$ в $\mathcal{D}_v$ найдется аналогичный путь $y_3 = y_2 w_3$ и т.д. Таким образом, для любого $n > 0$: $y_n \sim z y_{n-1} \sim z^2 y_{n-2} \sim \ldots \sim z^n$, причем для любого n путь y_{n+1} является продолжением пути y_n. Это означает, что в $\mathcal{D}_v$ существует ветвь y, аналогичная z^∞, а так как для любого n

$y_{n+1} \sim z y_n$, то $y \sim zy$. В силу (I), $AyfAzy$, и, следовательно $AyfAz^{\infty}$. Поэтому согласно $(f2)$ и $(f3)$ $Aw_0 yfAw'$, т.е. ветвь $w_0 y$ диаграммы $\mathcal{D}$ является искомой

2) Пусть $w' = w_0 z^n w_2'$, где $n \in N'$ и ветвь w_2' диаграммы $\mathcal{D}$ - не пустая. В силу (I) в $\mathcal{D}_v$ существует ветвь w_2 , аналогичная w_2' и такая, что $Aw_2 fAw_2'$, откуда с помощью $(f2)$ получаем: $Azw_2 fAzw_2'$ (2) . Рассмотрим ветвь zw_2 диаграммы $\mathcal{D}_u$. В силу (I) для нее в дереве $\mathcal{D}_v$ существует аналогичная ветвь w_3 , причем $Aw_3 fAzw_2$. В виду (2) и $(f3)$ отсюда следует, что $Aw_3 fAzw_2'$ (3) Рассмотрим теперь ветвь zw_3 диаграммы $\mathcal{D}_u$ и аналогичную ей ветвь w_4 дерева $\mathcal{D}_v$. Опять из (I)-(3) получаем: $Aw_4 fAzw_3$ и $Aw_4 fAz^2 w_2'$ (4). Продолжив это построение нужное число раз, получим для произвольного n ветвь w_{n+1} дерева $\mathcal{D}_v$ такую, что $Aw_{n+1} fAz^{n-1} w_2'$. Отсюда с помощью $(f2)$ и $(f3)$ получаем $Aw_0 zw_{n+1} fAw_0 z^n w_2'$. Поскольку $w_0 z^n w_2' = w'$, а $w_0 z w_{n+1}$ является аналогичной ей ветвью диаграммы $\mathcal{D}$, то тем самым утверждение доказано.

Итак, мы доказали, что $\mathcal{D} I_f \mathcal{D}'$. Для остальных отношений доказательство можно получить путем небольшой модификации доказательства для отношения I_f . ↓

<u>Следствие I</u>. Если f - побуквенное отношение на $A^{\circledast}$, то для любого A,k-дерева $\mathcal{D}$, во-первых, $\mathcal{D} I_f \mathcal{D}^{I_f}$ и, во-вторых, если $\Phi \in \{\Psi_f, \Omega_f, I_f', \Psi_f', \Omega_f'\}$ и Φ - сверточная последовательность для дерева $\mathcal{D}$ ко-

нечна, то $\mathcal{D}\,\Phi\,\mathcal{D}^{\Phi}$.

Второе утверждение непосредственно следует из теоремы 2.I и предложения 2.5. Чтобы доказать первое, достаточно заметить, что в I_f -сверточной последовательности между множествами ветвей всех диаграмм сохраняется взаимнооднозначное соответствие.

Следствие 2. Если f -побуквенное отношение на A^{*} и $\Phi \in \{ I_f, \Psi_f, \Omega_f, I_f', \Psi_f', \Omega_f' \}$, то для любых A, k - деревьев $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$, для которых Φ - сверточные последовательности конечны, если Φ сохраняет n -местное свойство P , то $P(\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_n) \Rightarrow P(\mathcal{D}_1^{\Phi},\ldots,\mathcal{D}_n^{\Phi})$, и если Φ^{-1} сохраняет P , то $P(\mathcal{D}_1^{\Phi},\ldots \mathcal{D}_n^{\Phi}) \Rightarrow$ $\Rightarrow P(\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_n)$.

Аналогичное утверждение можно получить для произвольных отношений Φ , но для специального класса свойств, которые мы определим ниже. Для простоты ограничимся рассмотрением одноместных свойств.

Одноместное свойство P на множестве диаграмм назовем доминантным, если выполняются следующие два условия:

$(d1)$ свойством P обладает всякая диаграмма $\mathcal{D}$, в которой имеется субдиаграмма, обладающая свойством P , и

$(d2)$ если $P(\mathcal{D})$ и диаграмма $\mathcal{D}'$ получается из $\mathcal{D}$ удалением полной поддиаграммы, не обладающей свойством P и присоединением образовавшихся висячих дуг к произвольным оставшимся вершинам, то $P(\mathcal{D}')$.

Пусть в диаграмме $\mathcal{D}$ некоторая неконцевая вершина v имеет отрицательную степень (т.е. число дуг, ведущих в нее) $m > 1$. Отсоединим какие-либо $n < m$ из этих дуг от v и направим их в корень произвольного дерева $\mathcal{D}_1$.

Отношение $\prec$ такое, что $\mathcal{D} \prec \mathcal{D}'$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}'$ получается из $\mathcal{D}$ вышеописанным способом, назовем отношением развертки. Если при этом $\mathcal{D}_1 \Phi \mathcal{D}_v$, то соответствующее отношение обозначим $\overset{\Phi}{\prec}$ и будем называть его отношением Φ -развертки.

Легко доказывается

<u>Предложение 2.6.</u> Если отношения Φ и $\overset{\Phi}{\prec}$ сохраняют доминантное свойство P, то для всякого дерева $\mathcal{D}$, для которого Φ -сверточная последовательность конечна, $P(\mathcal{D}) \Longleftrightarrow P(\mathcal{D}^{\Phi})$.

$\downarrow$ Пусть $\mathcal{D}_o = \mathcal{D}, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n = \mathcal{D}^{\Phi}$ - сверточная последовательность для дерева $\mathcal{D}$. Для произвольного i, $0 \leqslant i < n$, рассмотрим переход от $\mathcal{D}_i$ к $\mathcal{D}_{i+1}$. Пусть при этом переходе из $\mathcal{D}_i$ удаляется поддерево $\mathcal{D}_v$, обладающее свойством P. Так как в $\mathcal{D}_{i+1}$ должна иметься поддиаграмма $\mathcal{D}_u$ такая, что $\mathcal{D}_v \Phi \mathcal{D}_u$, то поскольку Φ сохраняет свойство P, выполняется $P(\mathcal{D}_u)$. Но если свойство P -доминантное, то по условию $(d1)$ свойством P обладает и диаграмма $\mathcal{D}_{i+1}$. Если при переходе от $\mathcal{D}_i$ к $\mathcal{D}_{i+1}$ из $\mathcal{D}_i$ удаляется поддерево, не обладающее доминантным свойством P, то $P(\mathcal{D}_{i+1})$ в силу условия $(d2)$. Таким образом, $P(\mathcal{D}) \Rightarrow P(\mathcal{D}^{\Phi})$. В обратную сторону утверждение непосредственно следует из сохраняемости свойства P отношением $\overset{\Phi}{\prec}$. $\downarrow$

Нетрудно убедиться, что все свойства I)-5) на стр.6 - доминантные и рекурсивные на множестве конечных диаграмм. Отметим еще очевидное

<u>Предложение 2.7.</u> Если f -побуквенное отношение на $A^{\circledast}$ и $\Phi \in \{I_f, \Psi_f, \Omega_f\}$, то $\Phi, \Phi^{-1}, \overset{\Phi}{\prec}, \overset{\Phi'}{\prec}$

сохраняют свойства O, $Б$, C_a, C_a^{∞}. Отношения I_f, I_f^{-1}, $\overset{\Phi}{\prec}$, $\overset{\Phi'}{\prec}$ и Ψ_f^{-1} сохраняют, кроме того, свойство O^{∞}.

Отсюда и из предложения 2.6 следует

<u>Предложение 2.8.</u> Если f -побуквенное отношение на $A^{\circledast}$, $\Phi \in \{I_f, \Psi_f, \Omega_f, I'_f, \Psi'_f, \Omega'_f\}$ и $P \in \{O, Б, C_a, C_a^{\infty}\}$, то для всякого A, k-дерева $\mathcal{D}$, для которого Φ -сверточная последовательность конечна, $P(\mathcal{D}) \Leftrightarrow P(\mathcal{D}^{\Phi})$.

Некоторый аналог предложения 2.8 можно получить для следующего класса свойств.

Одноместное свойство P на множестве диаграмм назовем наследственным, если выполняются следующие два условия:

(I) если $\mathcal{D}_1$ - поддиаграмма (не обязательно полная) диаграммы $\mathcal{D}$, то $P(\mathcal{D}_1) \Rightarrow P(\mathcal{D})$,

(2) если $P(\mathcal{D}) \& \neg P(\mathcal{D}_1)$, где $\mathcal{D}_1$ - начальная поддиаграмма диаграммы $\mathcal{D}$ (т.е. $\mathcal{D}_1$ имеет тот же корень, что и $\mathcal{D}$), то существует вершина v диаграммы $\mathcal{D}$, не принадлежащая поддиаграмме $\mathcal{D}_1$, такая, что $P(\mathcal{D}_v)$.

Примерами наследственных свойств могут служить свойства Б, C_a, C_a^{∞}, O^{∞}.

Нетрудно убедиться, что наследственные свойства сохраняются операциями развертки, поэтому с помощью следствия 2 из теоремы 2.I получаем

<u>Предложение 2.9.</u> Если f - побуквенное отношение на $A^{\circledast}$, $\Phi \in \{I_f, \Psi_f, \Omega_f, I'_f, \Psi'_f, \Omega'_f\}$ и Φ сохраняет наследственное свойство P, то для любой A, k-диаграммы $\mathcal{D}$, для которой Φ -сверточная

последовательность конечна, $P(\mathcal{D}) \Longleftrightarrow P(\mathcal{D}^f)$.

3. <u>Свертки по ветвям</u>.

3.I. Пусть f -побуквенное отношение на $A^{\circledast}$, $\mathcal{D}$ - произвольное A,k-дерево и $Q \subseteq AW\mathcal{D}$ - какой-либо f-базис множества $AW\mathcal{D}$. Пусть $\mathcal{D}_Q$ обозначает такое субдерево дерева $\mathcal{D}$, что $AW\mathcal{D}_Q = Q$. Тогда A,k-диаграмму $\mathcal{D}_Q^{\Omega_f}$ назовем f-сверткой по ветвям дерева $\mathcal{D}$ и обозначим ее $\mathcal{D}^f$.

Ясно, что $\mathcal{D}\,\Omega_f\,\mathcal{D}_Q$, а в силу следствия I из теоремы 2.I, если Ω_f-сверточная последовательность для $\mathcal{D}_Q$ конечна, то $\mathcal{D}_Q\,\Omega_f\,\mathcal{D}_Q^{\Omega_f}$, и потому в силу транзитивности отношения Ω_f, $\mathcal{D}\,\Omega_f\,\mathcal{D}^f$. Таким образом получаем

<u>Предложение 3.I</u>. Если Q является f-базисом множества $AW\mathcal{D}$ и Ω_f - сверточная последовательность для дерева $\mathcal{D}_Q$ конечна, то $\mathcal{D}\,\Omega_f\,\mathcal{D}^f$.

Ω_f -свертку дерева $\mathcal{D}_Q$ можно, в частности, строить так, чтобы все поддеревья $\mathcal{D}_{v}$, удаляемые на каждом сверточном шаге (а, следовательно, и поддеревья $\mathcal{D}_{v_i}$ такие, что $\mathcal{D}_{v_j}\,\Omega_f\,\mathcal{D}_{v_i}$) состояли только из одной ветви. Легко доказывается следующее

<u>Предложение 3.2</u>. Если побуквенное отношение f таково, что любое подмножество $Q \subseteq A^{\circledast}$ имеет конечный f-базис, то любое A,k-дерево $\mathcal{D}$ имеет конечную f-свертку $\mathcal{D}^f$.

$\uparrow$ Действительно, сначала возьмем конечный f-базис Q для множества $AW\mathcal{D}$. Потом заметим, что для любого α из A^{∞}, если множество $\{\alpha_{[i,\infty]} : i \in N'\}$, где $\alpha_{[i,\infty]} = \alpha_{[i]}\alpha_{[i+1]}\ldots$, имеет конечный f-базис, то найдутся такие числа m и n, что $m<n$ и $\alpha_{[n,\infty]} f \alpha_{[m,\infty]}$. Это означает, что для дерева $\mathcal{D}_Q$ существует конечная Ω_f-свертка $\mathcal{D}_Q^{\Omega_f} = \mathcal{D}^f$. ↓

3.2. Отношение h

Теперь мы рассмотрим специальное побуквенное отношение h, для которого любое A,k-дерево имеет конечную h-свертку.

Определим отношение $h \subseteq A^{\circledast} \times A^{\circledast}$ следующим образом. Для произвольных $\alpha,\beta \in A^{\circledast}$ полагаем, что $\alpha h \beta$ тогда и только тогда, когда существует функция ν, отображающая $N'_{\ell\alpha}$ на $N'_{\ell\beta}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

(h 1) $\forall i \leqslant \ell\alpha \; (\alpha_{[i]} = \beta_{[\nu i]})$

(h 2) $\forall i \leqslant \ell\alpha \; \forall k < \nu i \; \exists j < i \; (\nu j = k)$

(h 3) $\forall i \leqslant \ell\beta$ (множество $\nu^{-1} i$ - конечно)

(h 4) $\alpha,\beta \in A^{*} \Longrightarrow \nu\ell\alpha = \ell\beta$

Свойство (h 2) является аналогом непрерывности отображения h. Отметим, что из (h 2) следует: $\nu 1 = 1$. Если функция ν удовлетворяет условиям (h 1)-(h 4), то будем говорить, что функция ν осуществляет отношение h для (сверх-) слов α,β.

Нетрудно доказать

Предложение 3.3. 1) Отношение h на $A^{\circledast}$ - побуквенное. 2) Отношение h на множестве A^{*} рекурсивно. 3) Если $\alpha h \beta$, то существует рекурсивная функция ν, осуществляющая отношение h для α,β, в частности, рекурсивна максимальная функция, осуществляющая h для α,β. 4) Если $\alpha,\beta \in A^{*}$ то $\alpha h \beta$ тогда и только тогда, когда совпадают последние буквы слов α, β и слово β можно получить из α вычеркиванием некоторых не первых вхождений букв.

Определенное выше отношение h обладает следующим важным свойством, которое выражено теоремой 3.I, где A – произвольный конечный алфавит.

Теорема 3.I. Для всякого подмножества множества $A^{\circledast}$ существует конечный h-базис.

Прежде, чем доказывать эту теорему, мы докажем три леммы.

Если для каждого $i = 1,2,\ldots,n$ на множестве P_i определено бинарное отношение f_i, то тем самым на декартовом произведении $P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$ определено бинарное отношение $f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_n \subseteq (P_1 \times P_1) \times (P_2 \times P_2) \times \ldots \times (P_n \times P_n)$ так: $((\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)) \in f_1 \times f_2 \times \ldots f_n \Longleftrightarrow \forall i \leqslant n$ $(\alpha_i \; f_i \; \beta_i)$. В случае прямой степени $P^n = P \times P \times \ldots \times P$ мы вместо $f^n = f \times f \times \ldots \times f$ будем писать просто f. Если f – бинарное отношение на P, то f-цепью назовем всякую последовательность $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ элементов множества P такую, что $\alpha_0 f \alpha_1$, $\alpha_1 f \alpha_2, \ldots$

Пусть $\geqslant$ – произвольное отношение рефлексивного частичного порядка на множестве P. Отношение $\geqslant$ распространяется, как описано выше, на множества P^n, $n \geqslant 1$, и на множества их подмножеств. Мы будем обозначать через $>$ отношение, удовлетворяющее условию $(*)$ $x > y \Longleftrightarrow x \geqslant y \;\&\; y \not\geqslant x$. Отметим, что распространение отношения $>$ с множества P на множества P^n или на множества их подмножеств в общем случае не удовлетворяет условию $(*)$. Как обычно, вместо $\geqslant^{-1}$ и $>^{-1}$ будем писать $\leqslant$ и $<$, а $>$ – цепь будем называть убывающей. Если $\alpha \not\geqslant \beta$ и $\beta \not\geqslant \alpha$, то элементы α, β будем называть несравнимыми, и будем записывать это так: $\alpha \not\lessgtr \beta$. На множестве N всех натуральных чисел символ $\geqslant$ будет обозначать отношение естественного порядка.

Лемма I. Совокупность следующих двух свойств частично упорядоченных множеств сохраняется при прямом произведении:

(I) любое множество попарно несравнимых элементов конечно,

(П) любая убывающая цепь конечна.

Отметим, что из условия (I) непосредственно следует, что любое множество имеет конечное число минимальных элементов.

↑ Пусть R_0, R_1 - частично упорядоченные множества, удовлетворяющие условиям (I) и (П). Предположим, что в $R_0 \times R_1$ не выполняется условие (I), и пусть $(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), \ldots$ - бесконечная последовательность попарно несравнимых элементов множества $R_0 \times R_1$. Очевидно, что тогда для любых i, j из N должно выполняться условие (i, j): $\alpha_i < \alpha_j \& \beta_i \geqslant \beta_j \vee \vee \alpha_i \geqslant \alpha_j \& \beta_i < \beta_j \vee \alpha_i \not\lessgtr \alpha_j \vee \beta_i \not\lessgtr \beta_j$. Так как в R_0 и в R_1 условие (I) выполняется, то среди условий (i ,0), i = I,2, ..., должно найтись бесконечно много таких, у которых истинно либо $\alpha_i < \alpha_0 \& \beta_i \geqslant \beta_0$, либо $\alpha_i \geqslant \alpha_0 \& \beta_i < \beta_0$. Пусть, например, для бесконечной подпоследовательности $i_1, i_2, \ldots$ выполняется условие $\alpha_{i_r} < \alpha_0 \& \beta_{i_r} \geqslant \beta_0$, r = I,2, ... Это означает, что в R_0 имеется бесконечное множество элементов, строго меньших α. Но это противоречит тому, что в R_0 выполняются условия (I) и (П).

Выполнение условия (П) для $R_0 \times R_1$ очевидно, так как наличие в $R_0 \times R_1$ бесконечной убывающей цепи $(\alpha_0, \beta_0) > > (\alpha_1, \beta_1) > \ldots$ влечет наличие таковой по крайней мере в одном из множеств $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots\} \subseteq R_0$, $\{\beta_0, \beta_1, \ldots\} \subseteq R_1$. ↓

<u>Определение</u>. Пусть $\alpha \in A^{\infty}$. Слово $\alpha' = \alpha_{[1]}\alpha_{[2]}\ldots\alpha_{[n]}$ назовем полным началом (п.н.) сверхслова α, если α' содержит все вхождения букв, имеющих в α конечное число вхождений, а также содержит представителей всех букв, входящих в α.

Если $\alpha \in A^{\circledast}$, то обозначим через $A(\alpha)$ множество всех букв из A, входящих в α.

<u>Лемма 2.</u> Для любых α, β из A^{∞} отношение $\alpha h \beta$ выполняется тогда и только тогда, когда найдутся п.н. α' сверхслова α и п.н. β' сверхслова β такие, что $\alpha' h \beta'$, и если $\alpha = \alpha'\alpha''$, $\beta = \beta'\beta''$, то $A(\alpha'') = A(\beta'')$.

$\downarrow$ Действительно, если $\alpha h \beta$, то ясно, что для некоторых п.н. α', β' должно выполняться $\alpha' h \beta'$. Пусть $\alpha = \alpha'\alpha''$, $\beta = \beta'\beta''$. Поскольку каждая буква, входящая в α'' (в β'') имеет там бесконечное множество вхождений, то из условия $(h3)$ следует, что $A(\alpha'') = A(\beta'')$. Обратно, пусть $\alpha = \alpha'\alpha''$, $\beta = \beta'\beta''$, где α' - п.н. α, β' - п.н. β, $\alpha' h \beta'$ и $A(\alpha'') = A(\beta'')$. Поскольку каждая буква, входящая в α'' (в β''), входит туда бесконечное число раз, причем все буквы из $A(\alpha'')$ (из $A(\beta'')$) содержатся в $A(\alpha')$ (в $A(\beta')$), то ясно, что функцию γ, осуществляющую отображение h слова α' на слово β', можно продолжить на N' с сохранением условий $(h1) - (h4)$. $\downarrow$

Назовем сокращением слова α из A^* всякое слово β, полученное из α вычеркиванием некоторых вхождений букв. Если β является сокращением слова α, то обозначим: $\alpha \lambda \beta$. Нетрудно убедиться, что λ является отношением частичного порядка на A^*.

Если слово α содержит подслово вида $a_{i_r}^{m_r} a_{i_{r+1}}^{m_{r+1}} \dots a_{i_{s-1}}^{m_{s-1}} a_{i_s}^{m_s}$, где $a_{i_r} = a_{i_s}$, то выбрасывание подслова $a_{i_{r+1}}^{m_{r+1}} \dots a_{i_{s-1}}^{m_{s-1}}$ назовем сжатием слова α.

<u>Лемма 3.</u> Отношение λ на множестве A^* удовлетворяет условиям (I) и (II) леммы I, т.е. (I) любое множество попарно λ-несравнимых элементов конечно и (II) любая $\lambda_{\neq}$-цепь конечна (где $\alpha \lambda_{\neq} \beta \Leftrightarrow \alpha \lambda \beta \,\&\, \alpha \neq \beta$).

$\uparrow$ Выполнение условия (II) очевидно, поскольку из $\alpha \lambda_{\neq} \beta$ следует, что $\ell\alpha > \ell\beta$. Докажем свойство (I) с помощью индукции по числу букв в алфавите A. Для однобуквенного алфавита это утверждение очевидно, так как в этом случае отношение λ изоморфно отношению $\geqslant$ на N. Предположим, что утверждение верно для алфавитов с меньшим числом букв, чем в A. Пусть Q – произвольное множество попарно λ-несравнимых слов из A^*. Поскольку число подмножеств множества A конечно, то мы можем считать, что любое слово из Q содержит вхождения всех букв из A. Рассмотрим следующую функцию $\rho : A^* \longmapsto N$. Пусть $\rho(\alpha)$ это – максимальное число непересекающихся подслов слова α, каждое из которых содержит вхождения всех букв из A. Докажем (VI): для любых α, β из A^*, если $\rho(\beta) \geqslant \ell\alpha$, то $\beta \lambda \alpha$. Действительно, пусть $\alpha = a_{i_1}^{m_1} a_{i_2}^{m_2} \dots a_{i_k}^{m_k}$. Очевидно, что для получения такого сокращения β' слова β, что $\beta' = a_{i_1}^{n_1}\beta_1$, где $n_1 \geqslant m_1$, достаточно проделать не более m_1 операций сжатия, на что потребуется не более m_1 подслов, содержащих все буквы из A. Далее, из β_1 получаем слово $\beta_1' = a_{i_2}^{n_2}\beta_2$, где $n_2 \geqslant m_2$, затратив не более m_2 подслов, содержащих все буквы из A и т.д. В результате получим слово $\hat{\beta}$, одним из сокращений которого является α.

Пусть ℓ – минимальная длина слов из Q. В силу (УI) мы можем считать, что все слова α из Q таковы, что $\rho(\alpha) \leqslant \ell$. Поэтому, если $\alpha \in Q$, то мы можем представить его в виде (I): $\alpha = \alpha_1 a_{i_1}^{m_1}\alpha_2 a_{i_2}^{m_2} \dots \alpha_k a_{i_k}^{m_k}$, где $k \leqslant \ell$ и для $1 \leqslant s \leqslant k$ слово α_s не содержит букву a_{i_s}. Поскольку различных наборов $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ – конечное множество, то достаточно рассмотреть множество Q с фиксированным набором $i_1, \dots, i_k$, т.е. каждое слово α из Q представимо в виде (I), где набор букв $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ одинаков для всех слов. Для $1 \leqslant s \leqslant k$ обозначим: $R_s = \{\alpha_s : \alpha \in Q\}$. Поскольку все слова из R_s не содержат букву a_{i_s}, то согласно индуктивному предположению каждое множество R_s таково, что для него выполняются условия (I) и (II). Ясно, что эти условия выполняются и для слов вида a_i^m. Поэтому в силу леммы I условия (I) и (II) выполняются и для множества Q. ↓

Докажем теперь теорему 3.I: любое подмножество $Q \subseteq A^{\circledast}$ имеет конечный h-базис.

↑ Ясно, что достаточно доказать это утверждение отдельно для случаев, когда $Q \subseteq A^*$ и $Q \subseteq A^\infty$.

I) Пусть $Q \subseteq A^*$ и $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Очевидно, что каждое слово α из A^* однозначно представимо в виде (I):

$$\alpha = a_{i_0}^{k_0} a_{i_1}^{k_1} \alpha_1 a_{i_2}^{k_2} \alpha_2 \dots a_{i_m}^{k_m} \alpha_m a_{i_{m+1}}^{k_{m+1}} ,$$

где (t I) буквы $a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ попарно различны, (t 2) $a_{i_{m+1}} \in \{a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_m}, e\}$, где e - пустое слово, причем, если $a_{i_{m+1}} = e$, то $\alpha_m = e$ (t 3) для каждого $r = 1, \dots, m$ $A(\alpha_r) \subseteq \{a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_r}\}$ и первая буква слова α_r отлична от a_{i_r} (любое из слов α_r может быть пустым), (t 4) последняя буква слова α_m отлична от $a_{i_{m+1}}$.

Таким образом всё множество A^* разбивается на классы $T(a_{i_0}, \dots, a_{i_m}, a_{i_{m+1}})$, характеризующиеся упорядоченными наборами букв $a_{i_0}, \dots, a_{i_m}, a_{i_{m+1}}$, удовлетворяющими условиям (t I) и (t 2). Класс $T(a_{i_0}, \dots, a_{i_m}, a_{i_{m+1}})$ можно определить так:

$$T(a_{i_0}, \dots, a_{i_m}, a_{i_{m+1}}) = a_{i_0}^+ a_{i_1}^+ (a_{i_0} \vee a_{i_1})^* a_{i_2}^+ (a_{i_0} \vee a_{i_1} \vee a_{i_2})^* \dots \dots a_{i_m}^+ (a_{i_0} \vee \dots \vee a_{i_m})^* a_{i_{m+1}}^* ,$$

где $a_i^+ = a_i a_i^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} a_i^k$

Поскольку различных наборов букв $a_{i_0}, \dots, a_{i_{m+1}}$, удовлетворяющих условиям (t I) и (t 2) - конечное множество, то и множество классов T конечно, и потому нам достаточно рассмотреть случай, когда множество Q целиком содержится в некотором классе $T(a_{i_0}, \dots, a_{i_m}, a_{i_{m+1}})$.

Пусть слово α из Q имеет вид (I). Обозначим:

$$p(\alpha) = (k_0, k_1, \dots, k_{m+1}), \quad q(\alpha) = (A(\alpha_1), A(\alpha_2), \dots, A(\alpha_m))$$

Поскольку $m \leq n = |A|$, то различных наборов $q(\alpha)$ -

конечное множество, так что мы можем считать, что для любых α, β из Q $q(\alpha)=q(\beta)$. Пусть $\beta = a_{i_0}^{\ell_0} a_{i_1}^{\ell_1} \beta_1 a_{i_2}^{\ell_2} \ldots$ $\ldots \beta_m a_{i_{m+1}}^{\ell_{m+1}}$ (2). Из определения отношения h легко получаем (У1):

$$\alpha h \beta \Longleftrightarrow p(\alpha) \geqslant p(\beta) \ \& \ \forall r \leqslant m \ (\alpha_r \lambda \beta_r) .$$

Ясно, что $\alpha \lambda \beta \Longleftrightarrow \lambda(\alpha) \supseteq \lambda(\beta)$. Поэтому в силу леммы 3 отношение частичного порядка $\supseteq$ на множестве $\lambda(A^*) = \{\lambda(\alpha) : \alpha \in A^*\}$ удовлетворяет условиям (I) и (II). Обозначим для слова α вида (I) через $s(\alpha)$ набор $(\lambda(\alpha_1), \lambda(\alpha_2), \ldots, \lambda(\alpha_m))$. Согласно лемме I отношение $\supseteq$ на множестве $sQ = \{s(\alpha) : \alpha \in Q\}$ также удовлетворяет условиям (I) и (II). Из (УI) получаем (У2):

$$\forall \alpha, \beta \in Q \quad \alpha h \beta \Longleftrightarrow p(\alpha) \geqslant p(\beta) \ \& \ s(\alpha) \supseteq s(\beta) .$$

Поскольку отношение $\geqslant$ на множестве $pQ = \{p(\alpha) : \alpha \in Q\}$, очевидно, удовлетворяет условиям (I) и (II), то в силу леммы I для отношения $\geqslant \times \supseteq$ на множестве $pQ \times sQ$, а потому и подавно – на его диагональном подмножестве $psQ = \{(p(\alpha), s(\alpha)) : \alpha \in Q\}$ выполняются условия (I) и (II), откуда следует, что множество psQ имеет конечное множество минимальных элементов. В силу (У2) это означает, что множество Q имеет конечный h-базис.

2) Для $Q \subseteq A^\infty$ утверждение теоремы 3.I следует из леммы 2 и предыдущего доказательства, поскольку вместо Q согласно лемме 2 достаточно рассмотреть множество всех полных начал сверхслов из Q. $\dagger$

Отметим одно

<u>Следствие</u>. Любое подмножество декартова произведения $(A^*)^n$, где $n \in N$, имеет конечный h-базис, а потому и

любое подмножество множества $\bigcup_{i=1}^{n}(A^{\circledast})^{i}$ имеет конечный h-базис.

Из теоремы 3.I и предложения 3.2 следует

<u>Теорема 3.2.</u> Любое A,k- дерево имеет конечную h-свертку.

С помощью этой теоремы легко получается

<u>Теорема 3.3.</u> Любое свойство, рекурсивное на множестве конечных A,k-диаграмм и сохраняемое отношениями Ω_h и Ω_h^{-1}, рекурсивно на множестве всех A,k-деревьев относительно получения h-сверток.

$\downarrow$ Действительно, в силу теоремы 3.2, предложения 3.I и следствия 2 из теоремы 2.I, для любых A,k-деревьев $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_n$ получаем: $P(\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_n) \Leftrightarrow P(\mathcal{D}_1^h,\ldots,\mathcal{D}_n^h)$, где P - произвольное свойство, сохраняемое отношениями Ω_h и Ω_h^{-1}. Поскольку свертки $\mathcal{D}_1^h,\ldots,\mathcal{D}_n^h$ - конечны, это означает, что в случае, если свойство P рекурсивно на множестве конечных диаграмм, то существует алгоритм, позволяющий для любых A,k-деревьев $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_n$ по их h-сверткам распознать, выполняется $P(\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_n)$, или нет. $\uparrow$

Из предложения 2.8 следует, что свойствами, удовлетворяющими этой теореме, являются, в частности, $O, Б, C_a, C_a^{\infty}$.

Рассмотрим теперь некоторые приложения этой теории.

4. <u>Деревья вычислений для машин Тьюринга.</u>

4.I. Мы будем рассматривать детерминированные машины Тьюринга (м.Т.) с ленточным алфавитом $Б=\{0,1,\ldots,k-1\}$ и множествами состояний $S=\{s_0,s_1,\ldots,s_n\}$, где s_0 всегда будет считаться заключительным состоянием [2]. Командами являются слова вида $s_i\,a\,b\,d\,s_j$, где $s_i,s_j\in S$, $s_i\neq s_0$; $a,b\in Б$, $d\in\{R,L,H\}$. Смысл их обычный. Простыми конфигурациями будем называть слова вида $\alpha S_i \beta$, где $\alpha \in Б^*, S_i \in S, \beta \in Б^+$ ($Б^+ = Б Б^*$ - множество всех непустых слов в алфавите $Б$). Кратными конфигурациями будем называть слова вида $\alpha S_i x$ или $S_i x \alpha$, где $S_i \in S$, $\alpha \in Б^*$, x - буква, не входящая в $Б \cup S$. Буква x будет играть роль переменной с областью значений $Б$.

Если $\xi = \alpha S_i a$ ($\xi = S_i a \alpha$), то результатом применения к конфигурации ξ команды $S_i a b R S_j$ ($S_i a b L S_j$) будем считать кратную конфигурацию $\xi' = \alpha \beta S_j x$ $(\xi' = S_j x b \alpha)$. Во всех остальных случаях результат применения к какой-либо конфигурации подходящей команды определяется обычным образом.

Для каждой м.Т. определим на множестве всех (простых и кратных) конфигураций бинарное отношение $\overset{1}{<}$, соответствующее одному применению команды, следующим образом: если ξ - простая конфигурация, то $\xi \overset{1}{<} \xi'$ тогда и только тогда, когда ξ' является результатом применения к ξ соответствующей команды; если же ξ - кратная конфигурация, то $\xi \overset{1}{<} \xi'$ тогда и только тогда, когда для некоторой простой конфигурации ξ_a, полученной из ξ заменой буквы x буквой a из $Б$, $\xi_a \overset{1}{<} \xi'$. Транзитивное замыкание отношения $\overset{1}{<}$ обозначим $<$.

Деревом вычислений (д.в.) данной м.Т. с начальной конфигурацией ξ назовем ориентированное дерево $\mathcal{D}_\xi$, вершинами которого являются конфигурации, корнем служит конфигурация ξ и любая вершина η имеет в качестве непосредственных последователей все конфигурации η' такие, что $\eta \overset{1}{<} \eta'$. При этом, если конфигурация η кратная и для некоторых различных букв a, b из $Б$ $\eta_a \overset{1}{<} \eta'$ и $\eta_b \overset{1}{<} \eta''$ (где как и выше, конфигурации η_a, η_b получаются из η

заменой буквы x соответственно буквами a и b), то η' и η'' являются различными последователями η даже в том случае, когда $\eta' = \eta''$. Мы будем считать, что дуге, ведущей из η_a в η' приписана буква a, и потому, как и для A,k- диаграмм, вершину η' мы будем называть a-последователем вершины η. Для простой конфигурации η непосредственный последователь является a-последователем, если a —активная буква конфигурации η, т.е. $\eta = \alpha S_i a \beta$

В дальнейшем мы рассматриваем только полные м.Т., т.е. такие, у которых для любой пары $S_i a$, где $i \neq 0$ имеется команда, начинающаяся буквами $S_i\, a$. Для таких машин каждая простая незаключительная конфигурация имеет в точности одного непосредственного последователя, а каждая незаключительная кратная конфигурация имеет ровно $k = |Б|$ непосредственных последователей по одному для каждой буквы алфавита $Б$.

Обычно среди букв ленточного алфавита $Б$ выделяют некоторую "пустую" букву, например, 0 и считают, что при применении к конфигурациям вида $\alpha S_i\, a$ (или $S_i\, a \alpha$) команды $S_i a b R S_j$ ($S_i\, a b L S_j$) получается конфигурация $\alpha b S_j 0$ ($S_j 0 b \alpha$), т.е. считается, что всякая конфигурация неограниченно продолжается пустыми буквами. Поэтому функционирование м.Т. (т.е. применение ее команд), начатое с любой конфигурации ξ_0, дает последовательность конфигураций $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$, которая называется вычислением с начальной конфигурацией ξ. Мы не выделяем "пустую" букву и считаем, что конфигурация может быть продолжена любыми буквами из $Б$, и таким образом, в качестве обобщения понятия "вычисление" мы получаем д.в. Ветви д.в. $\mathcal{D}_{\xi_0}$ соответствуют вычислениям с начальными конфигурациями, являющимися различными продолжениями конфигурации ξ_0. В частности, если взять в качестве ξ_0 конфигурацию вида $s_i x$, то любая конфигурация с состоянием s_i является ее продолжением.

Более точно соответствие между ветвями д.в. и продолжениями корневой конфигурации можно определить следующим образом. Будем называть левыми (правыми) конфигурациями кратные конфигурации вида $s_i x \alpha$ $(\alpha s_i x)$. Пусть $W = \xi_0, \xi_1, \dots$ - ветвь д.в. $\mathcal{D}_{\xi_0}$ и пусть $\xi_{i_0}, \xi_{i_1}, \dots$ все левые, а $\xi_{j_0}, \xi_{j_1}, \dots$ - все правые конфигурации ветви W в порядке их вхождения в W. Если конфигурация $\xi_{i_\ell+1}$ $(\xi_{j_\ell+1})$ является a_ℓ - последователем конфигурации ξ_{i_ℓ} (b_ℓ - последователем конфигурации ξ_{j_ℓ}), $\ell = 0, 1, \dots$, то ветви W соответствует продолжение $\dots a_\ell \dots a_1 a_0 \xi_0 b_0 b_1 \dots b_\ell \dots$ [1)]

Это продолжение может быть как конечным, так и бесконечным в одну или в обе стороны в зависимости от числа левых и правых конфигураций в W. Вообще, если $W = \xi_0 \xi_1 \dots \xi_m$ - произвольный конечный путь в каком-либо д.в., то этим способом ему ставится в соответствие некоторое конечное продолжение $a_p \dots a_0 \xi_0 b_0 \dots b_q$ конфигурации ξ_0.

Далее мы будем считать, что вершинам д.в. приписаны буквы некоторого специального алфавита. А именно, назовем простыми (кратными) ядрами двубуквенные слова вида $s_i a$ $(s_i x)$, где $s_i \in S$, $a \in Б$. Ядро конфигурации ξ (т.е. подслово, являющееся ядром) обозначим через $Я\xi$. Пусть $Я$ обозначает множество всех ядер рассматриваемой м.Т.

Если каждой вершине η д.в. $\mathcal{D}_\xi$ приписать ядро $Я\eta$, то мы получим $Я, k$ - дерево, где $k = |Б|$ - число букв в ленточном алфавите.

---

1) Предполагается, что конфигурация ξ_0 - простая.

Свойства деревьев вычислений соответствуют определенным семантическим свойствам машин Тьюринга. Проблемы разрешения свойств $\mathcal{O}$ и $\mathcal{Б}$ для д.в. называются, соответственно, проблемой остановки (ПО) и проблемой бессмертия (ПБ). Проблема разрешения свойства $C_{s_i a}$ называется проблемой существенности команды с ядром $s_i a$ $(П\, C_{s_i a})$. Свойство $\mathcal{O}^{\infty}$ дерева $\mathcal{D}_{s_1 x}$ соответствует бесконечности области определения функции, вычисляемой данной м.Т. (в некотором подходящем смысле).

Как правило, все содержательные свойства разрешимы на конечных диаграммах, поэтому в силу следствий из теоремы 2.I проблемы их разрешения сводятся к получению конечных Φ -сверток д.в. для подходящих отношений Φ . Ниже будут рассмотрены некоторые из таких отношений и приведены примеры классов м.Т. для д.в. которых эффективно получаются конечные свертки, и, следовательно, разрешимы определенные свойства.

Наряду с д.в. мы будем рассматривать $Я, k$-диаграммы, вершинами которых, как и в д.в. являются конфигурации, причем вершине ξ приписана "буква" $Я_{\xi}$. Такие диаграммы будем называть конфигурационными диаграммами (к.д.). Так же как и для д.в. выражения вида $\mathcal{D}_{\xi}$ для к.д. обозначают, что ξ является корнем рассматриваемой к.д.

Будем говорить, что к.д. $\mathcal{D}'$ является нормализованной диаграммой $\mathcal{D}$, если она получается из $\mathcal{D}$ следующим образом. В каждой кратной конфигурации η , положительная степень которой в диаграмме $\mathcal{D}$ равна I, заменяем букву x такой буквой a , что непосредственным последователем конфигурации η в $\mathcal{D}$ является a-последователь. (Аналогичная замена производится и в ядрах конфигураций, приписанных вершинам).

Если Φ - бинарное отношение на к.д., то мы будем считать, что отношение выполняется и для любой пары к.д. $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ такой, что $\mathcal{D}_1' \Phi \mathcal{D}_2'$, где $\mathcal{D}_1', \mathcal{D}_2'$ нормализованные диаграммы $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$.

Отношения $I_=, I_='$ на множестве к.д. будем называть ядерным изоморфизмом или короче, Я - изоморфизмом, и соответственно, ядерным эндоморфизмом или Я-эндоморфизмом. Вместо $I_=, I_='$ будем писать I и I'.

Пусть ξ - конфигурация, $\alpha \in Б^+$. Определим операцию расширения конфигураций следующим образом:

$$\xi \cdot \alpha = \begin{cases} \xi\alpha, & \text{если конфигурация } \xi \text{ простая или левая, т.е. } \xi = s_i x \beta, \text{ и } \beta \neq e \\ \beta s_i \alpha, & \text{если } \xi = \beta s_i x \end{cases}$$

$$\alpha \cdot \xi = \begin{cases} \alpha\xi, & \text{если конфигурация } \xi \text{ простая или правая (т.е. } \xi = \beta s_i x) \\ \alpha' s_i a \beta, & \text{если } \alpha = \alpha' a \text{ и } \xi = s_i x \beta \end{cases}$$

Кроме того, полагаем $\xi \cdot e = e \cdot \xi = \xi$, где e - пустое слово. Очевидно, что эта операция ассоциативна в том смысле, что для любой конфигурации ξ и любых слов α, β из $Б^*$

$$(\alpha \cdot \xi) \cdot \beta = \alpha \cdot (\xi \cdot \beta)$$

Если $\eta = \alpha \cdot \xi \cdot \beta$, то будем говорить, что конфигурация η является расширением конфигурации ξ, что обозначим $\xi \leq \eta$ или $\eta \geq \xi$.

Очевидно

<u>Предложение 4.I</u>. Для любой м.Т., если $\xi \leq \eta$, то д.в. $\mathcal{D}_\eta$ Я - эндоморфно д.в. $\mathcal{D}_\xi$, т.е. $\mathcal{D}_\eta I' \mathcal{D}_\xi$

Поскольку любая конфигурация ξ с состоянием s_i является расширением конфигурации $s_i x$, то в дереве $\mathcal{D}_{s_i x}$ существует субдерево $\mathcal{D}'_{s_i x}$, Я - изоморфное дереву $\mathcal{D}_\xi$. Это дает нам основание в качестве свойств инициальных м.Т. с начальным состоянием s_1 рассматривать свойства д.в. вида $\mathcal{D}_{s_1 x}$. Для неинициальных машин достаточно рассматривать конечные множества деревьев вида $\mathcal{D}_{s_i x}$, где $s_i \in S$.

4.2. Рассмотрим некоторые простые примеры классов м.Т. с разрешимыми свойствами [3].

<u>Пример I:</u> односторонние машины. Команды вида $s_i a b R s_j$ $(s_i a b L s_j)$ будем называть правыми (левыми) командами. Если в пути w применяются r правых и ℓ левых команд, то число $\sigma(w) = r - \ell$ назовем сдвигом пути w. Конфигурацию ξ назовем m-левоограниченной (m-правоограниченной), если для любого пути w в д.в. $\mathcal{D}_\xi$ сдвиг $\sigma(w) \geqslant -m$ $(\sigma(w) \leq m)$.

М.Т. назовем m-левоограниченной (m-правоограниченной), если любая ее конфигурация является m-левоограниченной (m-правоограниченной). М.Т. будем называть m-односторонней, если она является либо m-левоограниченной, либо m-правоограниченной. Пусть $T_{m,Л}$ $(T_{m,П})$ обозначает класс всех m-левоограниченных (m-правоограниченных) м.Т.; $T_m = T_{m,Л} \cup T_{m,П}$ - класс всех m-односторонних м.Т.

Рассмотрим отношение I_1 такое, что $\mathcal{D}_\xi I_1 \mathcal{D}_\eta \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow (\xi = \alpha_1 \alpha s_i \beta, \eta = \alpha_2 \alpha s_i \beta$ и $\ell\alpha = m)$. Ясно, что I_1 - это рекурсивное отношение эквивалентности на множестве всех д.в., причем $I_1 \subseteq I$. Очевидно, что m-левоограниченная машина в любом вычислении не может сдвинуть свою головку влево более, чем на m ячеек от первоначального положения на ленте. Поэтому для любой м.Т. из $T_{m,\Pi}$ и для любой конфигурации ξ д.в. $\mathcal{D}_\xi$ не может содержать конфигураций вида $\alpha' s_i \beta$, у которых $\ell_\beta > m + \ell_\xi$. Это означает, что множество всех полных поддеревьев любого д.в. $\mathcal{D}_\xi$ имеет конечный I_1-базис, и потому согласно предложению 2.3 имеет конечную I_1-свертку. Таким образом, в силу следствия I из теоремы 2.I и предложения 2.4 на множестве всех д.в. для м.Т. из $T_{m,\Pi}$ рекурсивны все свойства, сохраняемые отношениями I_1 и I_1^{-1} и рекурсивные на множестве конечных диаграмм. В силу симметрии аналогичное утверждение имеет место и для машин из $T_{m,\Pi}$. Отметим, что класс свойств, сохраняемых отношениями I_1 и I_1^{-1} не уже класса свойств, сохраняемых отношениями I и I^{-1}, поскольку $I_1 \subseteq I$.

Пример 2. Непечатающие машины - это такие м.Т., команды которых имеют вид $s_i a a d s_j$, и, следовательно, при их фуккционировании исходное сверхслово на ленте остается неизменным. Покажем, что для любого д.в. такой машины эффективно существует конечная $I_{h,1}$ - свертка, где $I_{h,1}$ - некоторое рекурсивное подотношение отношения I_h.

Рассмотрим следующее бинарное отношение $\varkappa$ на множестве $Б^*$. Для каждого д.в. $\mathcal{D}_\xi$ обозначим через $\mathcal{D}_\xi^1$ такой начальный его отрезок, каждая ветвь которого заканчивается первой кратной конфигурацией (отличной от корня), либо концом первого периода, если кратных конфигураций в ней нет (ясно, что в этом случае ветвь обязательно периодична). Тогда для произвольных α, β из $Б^*$ положим, что $\alpha \varkappa \beta$ тогда и только тогда, когда для любого состояния s_i и любой буквы a из $Б$ выполняется условие: если ξ и η - концевые вершины аналогичных ветвей деревьев $\mathcal{D}^1_{s a \alpha}$ и $\mathcal{D}^1_{s_i a \beta}$, то $Я\xi = Я\eta$ и конфигурации ξ, η обе правые, или обе левые, или обе простые, и такое же условие должно выполняться для деревьев $\mathcal{D}^1_{\alpha s_i a}$ и $\mathcal{D}^1_{\beta s_i a}$. Очевидно, что τ — рекурсивное отношение эквивалентности конечного ранга, причем, если $\alpha \tau \beta$, то для любого γ из $Б^*$, $\gamma\alpha\tau\gamma\beta$ и $\alpha\gamma\tau\beta\gamma$ (1).

Определим теперь отношение $I_{h,1}$ следующим образом:

$$\mathcal{D}_{\alpha_1 s_i \beta_1} I_{h,1} \mathcal{D}_{\alpha_2 s_i \beta_2} \Leftrightarrow (\alpha_1 \tau \alpha_2 \ \& \ \beta_1 \tau \beta_2 \ \& \ \mathcal{D}^1_{\alpha_1 s_i \beta_1} I_h \mathcal{D}^1_{\alpha_2 s_i \beta_2}).$$

(Это определение естественно распространяется и на произвольные к.д.).

Покажем сначала, что (для непечатающих м.Т.) $I_{h,1} \subseteq I_h$. Действительно, пусть $\mathcal{D}_{\alpha_1 s_i \beta_1} I_{h,1} \mathcal{D}_{\alpha_2 s_i \beta_2}$. Так как $\alpha_1 \tau \alpha_2$ и $\beta_1 \tau \beta_2$, и следовательно, для любого γ из $Б^*$ $\gamma\alpha_1 \tau \gamma\alpha_2$ и $\beta_1\gamma \tau \beta_2\gamma$, то в д.в. $\mathcal{D}_{\alpha_1 s_i \beta_1}$, $\mathcal{D}_{\alpha_2 s_i \beta_2}$ любые аналогичные ветви w_1, w соответствуют одинаковым продолжениям аналогичных ветвей деревьев $\mathcal{D}^1_{\alpha_1 s_i \beta_1}$, $\mathcal{D}^1_{\alpha_2 s_i \beta_2}$.
А так как $\mathcal{D}^1_{\alpha_1 s_i \beta_1} I_h \mathcal{D}^1_{\alpha_2 s_i \beta_2}$, то отсюда следует, что $Я w_1 h Я w_2$, т.е. $\mathcal{D}_{\alpha_1 s_i \beta} I_h \mathcal{D}_{\alpha_2 s_i \beta_2}$.

Поскольку отношение $I_{h,1}$ полностью определяется конечными поддеревьями и рекурсивным отношением τ конечного ранга, то отношение $I_{h,1}$ — рекурсивно. В силу следствия из теоремы 3.I любое множество деревьев вида $\mathcal{D}^1_\xi$ имеет конечный I_h -базис (поскольку каждое такое дерево содержит не более $k = |Б|$ ветвей). А так как ранг отношения τ конечен, то это верно и для отношения $I_{h,1}$ на множестве д.в., так что в силу предложения 2.3. любое д.в. имеет конечную $I_{h,1}$- свертку. Поскольку отношение $I_{h,1}$ рекурсивно, то в силу предложения 2.4 на множестве д.в. непечатающих машин рекурсивны свойства, сохраняемые отношениями $I_{h,1}$ и $I_{h,1}^{-1}$ и рекурсивные на множестве конечных к.д.

Пример 3: циклические машины. М.Т. можно рассматривать как конечный автомат со специальной интерпретацией букв выходного алфавита. Поэтому их можно задавать, как и конечные автоматы, диаграммами переходов, т.е. конечными ориентированными графами, вершинами которых являются состояния м.Т., а дугам приписаны буквы алфавита $Б$ (входной алфавит) и элементы множества $Б \times \{R, L, H\}$ (выходной алфавит). М.Т. называется циклической, если ее диаграмма переходов представляет собой пучок циклов с единственной общей для всех циклов вершиной (т.е. любая пара циклов имеет единственную общую точку, одну и ту же для всех пар). При этом других ориентированных циклов в диаграмме нет, т.е. любой путь из вершины, не входящей в состав пучка циклов, ведет в заключительную вершину и не содержит циклов. Предположим, что общей вершиной пучка является состояние s_1. Ясно, что в дереве $\mathcal{D}_{s_1 x}$ любая бесконечная ветвь содержит конфигурацию с состоянием s_1, причем существует конечное сечение, состоящее из таких конфигураций. Поскольку любая конфигурация ξ с состоянием s_1 является расширением конфигурации $s_1 x$, то в силу предложения 4.I. $\mathcal{D}_\xi \, I' \, \mathcal{D}_{s_1 x}$. Согласно предложению 2.2 это означает, что д.в. $\mathcal{D}_{s_1 x}$ эффективно имеет конечную I' -свертку. Для случая, когда пучок состоит из двух циклов, можно показать, что любое д.в. $\mathcal{D}_\xi$ эффективно имеет конечную Ω_h -свертку.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Берж К. Теория графов и ее применения. ИЛ. М.,1962.

2. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. "Наука", М., 1971.

3. Янов Ю.И. О некоторых семантических характеристиках машин Тьюринга. Доклады АН СССР, т. 224, №2, 1975 г., 301-304.

Ю.И. Янов. "Метод сверток для разрешения свойств формальных систем."

Редактор В.М. Храпченко. Корректор Ю.И. Янов.

№ Т-04452 от 31.01.77г. Заказ № 43. Тираж 150 экз.

Формат бумаги 60Х90, 1/16. Объем 1,8 уч. изд. л.

Цена 15 коп.

055(02)2

Отпечатано на ротапринтах в Институте прикладной математики АН СССР

Москва, Миусская пл. 4.

Цена 15 коп.